数理解析研究所講究録
1060 巻 1998 年 246-248

On algebraic independence of certain functions related to the elliptic modular function

天羽雅昭
群馬大学工学部

1 問題

$j(\tau)$ を楕円モジュラー関数とする．まず，1969 年に Mahler が証明した結果（の特別な場合）を述べよう．

定理 (Mahler [6]) α を零ではない複素数とするとき，4 つの関数

$$e^{\alpha\tau}, j(\tau), j'(\tau), j''(\tau)$$

は $\mathbf{C}(\tau)$ 上代数的独立である．

本稿で扱うのは，この定理を一般化した次の問題である．

問題 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ を零ではない複素数とし，$\beta_1, ..., \beta_n$ を零ではない複素数で $|\arg\beta_{\ell_1} - \arg\beta_{\ell_2}| < \pi$ $(1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n)$ をみたすものとする．このとき $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n$ についての適当な条件の下で，$m + 3n$ 個の関数

$$e^{\alpha_k\tau}, j(\beta_\ell\tau), j'(\beta_\ell\tau), j''(\beta_\ell\tau) \quad (k = 1, ..., m;\ \ell = 1, ..., n) \tag{1}$$

の $\mathbf{C}(\tau)$ 上での代数的独立性を証明せよ．

ここで β_ℓ $(\ell = 1, ..., n)$ の偏角についての条件は，$j(\beta_\ell\tau)$ たちが同じ領域で定義できるためのものである．また，この問題を解くためには次の 2 条件が必要である：

$1°$ $\alpha_1, ..., \alpha_m$ は有理数体上 1 次独立．

$2°$ $\beta_{\ell_1}/\beta_{\ell_2}$ $(1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n)$ はどれも有理数ではない．

実際，条件 $1°$ は $e^{\alpha_1\tau}, ..., e^{\alpha_m\tau}$ が $\mathbf{C}(\tau)$ 上代数的独立になるための必要十分条件であり，条件 $2°$ は $j(\beta_{\ell_1}\tau)$ と $j(\beta_{\ell_2}\tau)$ が $\mathbf{C}$ 上代数的独立であるための必要条件である．後者は，モジュラー多項式から従う（Lang [5], Chap. 5 を参照のこと）．さらに，これらの 2 条件が（問題を解くための）十分条件でもあることが予想される．以下で述べるように（定理 1 の系），$m = 1, n = 2$ の場合には確かに予想が成り立つ（ただし，$m = 1$ のとき $1°$ は無内容）．

注意 1　Mahler [6] の結果は，$j(\tau)$ に対してだけでなく，ある条件をみたす保型関数 $f(\tau)$ に対して，$e^{\alpha\tau}, f(\tau), f'(\tau), f''(\tau)$ の $\mathbf{C}(\tau)$ 上での代数的独立性を主張するものである．また，Mahler が $f(\tau)$ に課した条件は，Nishioka [8] によって緩められた．

注意 2　$j(\tau)$ の q-展開を $J(q)$ とおく．q が $0 < |q| < 1$ をみたす代数的数のとき，Barré, Diaz, Gramain, Philibert [2] が証明したように $J(q)$ は超越数であり，さらに Nesterenko [7] が証明したように $J(q), DJ(q), D^2J(q)$ は代数的独立である（ただし，$D = q\frac{d}{dq}$）．Bertrand [3] は，これを一般化して次のような予想をした：
$q_1, ..., q_n$ が $0 < |q_\ell| < 1$ をみたす代数的数で，かつ，これらのどの２つも乗法独立ならば，$J(q_1), ..., J(q_n)$ は代数的独立である．
$q_\ell = e^{2\pi i\beta_\ell}$ とおくと，q_ℓ についての条件は，$\beta_1, ..., \beta_n$ のどの２つの比も有理数ではない，と読み換えられる．よって，$J(q_\ell) = j(\beta_\ell)$ に注意すると，上述した我々の予想（の一部）は，Bertrand の予想の関数に対する類似物とみなすことができる．

2　結果

本稿の主結果は，次の定理である．

定理 1　$\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n$ を零ではない複素数で，次の２つの条件のうちの少なくとも一つをみたすものとする．このとき，(1) の $m + 3n$ 個の関数は $\mathbf{C}(\tau)$ 上代数的独立である：

(i) $\alpha_1, ..., \alpha_m$ は有理数体上１次独立で, かつ $0 < |\arg\beta_{\ell_1} - \arg\beta_{\ell_2}| < \pi$ $(1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n)$ をみたす.

(ii) $m = 1$ であり，かつ $\beta_1, ..., \beta_n$ は有理数体上１次独立で同じ偏角を持つ.

系　α を零ではない複素数とし，β_1, β_2 を，比が有理数ではない複素数で $|\arg\beta_1 - \arg\beta_2| < \pi$ をみたすものとする．このとき，７つの関数

$$e^{\alpha\tau}, j(\beta_1\tau), j'(\beta_1\tau), j''(\beta_1\tau), j(\beta_2\tau), j'(\beta_2\tau), j''(\beta_2\tau)$$

は $\mathbf{C}(\tau)$ 上代数的独立である.

もう一つ，$j(\tau)$ の導関数を含まない次の結果を述べておく：

定理 2　$\alpha_1, ..., \alpha_m$ を零ではない複素数とし，$\beta_1, ..., \beta_n$ を零ではない複素数で $|\arg\beta_{\ell_1} - \arg\beta_{\ell_2}| < \pi$ $(1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n)$ をみたすものとする．これら $m + n$ 個の数が有理数体上１次独立のとき，$m + n$ 個の関数

$$e^{2\pi i\alpha_1\tau}, ..., e^{2\pi i\alpha_m\tau}, j(\beta_1\tau), ..., j(\beta_n\tau)$$

は $\mathbf{C}(\tau)$ 上代数的独立である.

定理 1 の証明は，$j(\tau)$ の保型性を使った Mahler に負う議論および Kronecker の近似定理（Hardy-Wright [4], Theorem 442）を使った議論からなる．定理 2 の証明は，$j(\tau)$ の q-展開を使うだけでできる．詳しくは，[1] をご覧ください.

参考文献

[1] M. Amou, On algebraic independence of certain functions related to the elliptic modular function, preprint.

[2] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain, G. Philibert, Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin, Invent. Math. 124 (1996), 1-9.

[3] D. Bertrand, Theta functions and transcendence, Madras Number Theory Symposium 1996, The Ramanujan J. 1 (1997), 339-350.

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th Edition, Oxford University Press, 1979.

[5] S. Lang, Elliptic functions, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1987.

[6] K. Mahler, On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions, J. Austral. Math. Soc. 10 (1969), 445-450.

[7] Yu.V. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, Mat. Sb. 187 (1996), 65-96. English translation: Sbornik Math. 187 (1996), 1319-1348.

[8] K. Nishioka, A conjecture of Mahler on automorphic functions, Arch. Math. 53(1989), 46-51.